

**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Мордовский государственный педагогический
университет имени М.Е. Евсевьева»**

Факультет среднего профессионального образования

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины: ОП.10 Численные методы

Специальность: 09.02.07 Информационные системы и программирование

Форма обучения: очная

Разработчик: Тарасова М. Ф., преподаватель факультета среднего профессионального образования МГПУ.

Программа рассмотрена и утверждена на заседании предметно-цикловой комиссии профессионального цикла по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование от 30.03.2020, протокол №9.

Программа с обновлениями рассмотрена и утверждена на заседании предметно-цикловой комиссии профессионального цикла по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование от 01.09.2020 г., протокол № 1.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общая характеристика рабочей программы учебной дисциплины.....	3
2. Структура и содержание учебной дисциплины.....	5
3. Условия реализации учебной дисциплины.....	8
4. Контроль и оценка результатов освоения учебной дисциплины.....	9
5. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся.....	10

1 ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ «ОП.10 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

1.1. Область применения программы

Программа учебной дисциплины «ОП.10 Численные методы» является частью ППССЗ в соответствии с ФГОС по специальности среднего профессионального образования 09.02.07 Информационные системы и программирование укрупненной группы специальностей 09.00.00 Информатика и вычислительная техника.

1.2. Место учебной дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы:

Дисциплина «ОП.10 Численные методы» входит в состав общепрофессионального цикла программы среднего профессионального образования – программы подготовки специалистов среднего звена – по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Изучение данного учебного курса является необходимой основой для последующего изучения дисциплин профессиональной подготовки, а также для прохождения учебной и производственной практик, подготовки студентов к государственной итоговой аттестации.

1.3. Цели и задачи учебной дисциплины – требования к результатам освоения учебной дисциплины:

Целью изучения дисциплины является овладение студентами теорией разнообразных численных методов и умение применять численные методы на практике при решении практических задач алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений, физики, техники.

Задачи дисциплины:

- ориентироваться в области вычислительной математики, пользоваться специальной литературой в изучаемой предметной области;

- уметь обосновать выбор средств для решения конкретных задач численного анализа;

- сводить постановки задач на содержательном уровне к формальным и относить их к соответствующим формальным моделям численного анализа или к прикладным средствам вычислительной математики;

- ориентироваться в структуре математических моделей как средствах вычислительной математики, возможностях и перспективах развития с учётом их компьютерной реализации.

С целью овладения указанным видом профессиональной деятельности и соответствующими профессиональными компетенциями обучающийся в ходе освоения профессионального модуля должен:

уметь:

- использовать основные численные методы решения математических задач;

- выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи;
- давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;

знать:

- методы хранения чисел в памяти электронно-вычислительной машины (далее – ЭВМ) и действия над ними, оценку точности вычислений;
- методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование и развитие следующих компетенций:

- выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам (ОК 01);
- осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности (ОК 02);
- работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами (ОК 04);
- осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста (ОК 05);
- использовать информационные технологии в профессиональной деятельности (ОК 09);
- пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках (ОК 10);
- формировать алгоритмы разработки программных модулей в соответствии с техническим заданием (ПК 1.1);
- разрабатывать программные модули в соответствии с техническим заданием (ПК 1.2);
- осуществлять рефакторинг и оптимизацию программного кода (ПК 1.5);
- осуществлять сбор, обработку и анализ информации для проектирования баз данных (ПК 11.1).

1.4. Рекомендуемое количество часов на освоение программы учебной дисциплины:

максимальной учебной нагрузки обучающегося 48 часов, в том числе:
 обязательной аудиторной учебной нагрузки обучающегося 36 часов;
 самостоятельной работы обучающегося 12 часов.

2 СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	<i>Объем часов</i>
Максимальная учебная нагрузка (всего)	48
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)	36
в том числе:	
теоретическое обучение	18
практические занятия	18
Самостоятельная работа обучающегося (всего)	12
Итоговая аттестация в форме <i>зачета</i>	

2.2 Тематический план и содержание учебной дисциплины «ОП.10 Численные методы»

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала, лабораторные работы и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, курсовая работа (проект) (если предусмотрены)		Объем часов	Уровни освоения
1	2		3	4
Тема 1. Элементы теории погрешностей	Содержание учебного материала		6	1
	1	Источники и классификация погрешностей результата численного решения задачи.		
	2	Абсолютная и относительная погрешности. Действия с приближенными числами.		
	Практические занятия: «Вычисление погрешностей результатов арифметических действий над приближенными числами».		3	2
	Самостоятельная работа. Написание реферата по теме: «Верные, сомнительные и значащие цифры».		2	3
Тема 2. Приближенные решения алгебраических и трансцендентных уравнений	Содержание учебного материала		6	1
	1	Постановка задачи локализации корней. Численные методы решения уравнений.		
	Практические занятия: «Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом половинного деления и методом итераций», «Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методами хорд и касательных».		3	2
	Самостоятельная работа. Написание реферата по теме: «Интерполирование сплайнами».		2	3
	Тема 3. Решение систем линейных алгебраических уравнений	Содержание учебного материала		6
1		Метод Гаусса.		
2		Метод итераций решения СЛАУ. Метод Зейделя.		
Практические занятия: «Решение систем линейных уравнений приближенными методами».		3	2	
Самостоятельная работа. Написание реферата по теме: «Применение метода Гаусса».		2	3	
Тема 4. Интерполирование и экстраполирование функций	Содержание учебного материала		6	1
	1	Интерполяционный многочлен Лагранжа. Интерполяционные формулы Ньютона.		
	2	Интерполирование сплайнами.		
	Практические занятия: «Составление интерполяционных формул Лагранжа, Ньютона, нахождение интерполяционных многочленов сплайнами».		3	2
	Самостоятельная работа. Решение примеров методом Лагранжа.		2	3
Тема 5. Численное интегрирование	Содержание учебного материала		6	1
	1	Формулы Ньютона - Котеса: методы прямоугольников, трапеций, парабол.		
	2	Интегрирование с помощью формул Гаусса.		
	Практические занятия: «Вычисление интегралов методами численного интегрирования».		3	2
	Самостоятельная работа. Презентация: «Уточнённая схема Эйлера».		2	3
Тема 6. Численное решение обыкновенных	Содержание учебного материала		6	1
	1	Метод Эйлера. Уточнённая схема Эйлера.		
	2	Метод Рунге – Кутта.		

дифференциальных уравнений	Практические занятия: «Применение численных методов для решения дифференциальных уравнений».	3	2
	Самостоятельная работа. Разработка алгоритмов и программ для решения дифференциальных уравнений численными методами.	2	3
	<i>Всего:</i>	48	

Для характеристики уровня освоения учебного материала используются следующие обозначения:

1. – ознакомительный (узнавание ранее изученных объектов, свойств);
2. – репродуктивный (выполнение деятельности по образцу, инструкции или под руководством)
3. – продуктивный (планирование и самостоятельное выполнение деятельности, решение проблемных задач)

.

3 УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Материально-техническое обеспечение

Для реализации программы учебной дисциплины предусмотрен кабинет математических дисциплин, оснащенный необходимым оборудованием:

Основное оборудование:

Автоматизированное рабочее место преподавателя (персональный компьютер (процессор Core i5, оперативная память 4 Гб; монитор 22”), проектор, интерактивная доска); колонки; меловая ученическая доска; калькуляторы; посадочные места по количеству обучающихся.

Учебно-наглядные пособия:

Презентации; таблицы демонстрационные: Степени чисел, Таблица квадратов натуральных чисел от 1 до 100, Арифметический квадратный корень, Функции и графики, Основные тригонометрические тождества, Тригонометрические уравнения, неравенства, Приращение функции. Понятие о производной, Интеграл. Формула Ньютона-Лейбница, Таблица неопределенных интегралов, Объемы многогранников, Координаты точки и вектора в пространстве.

Лицензионное программное обеспечение:

- Microsoft Windows 7 Pro;
- Microsoft Office Professional Plus 2010.

3.2. Информационное обеспечение обучения

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники

1. Зенков, А. В. Численные методы : учебное пособие для среднего профессионального образования / А. В. Зенков. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 122 с. – URL: <https://urait.ru/bcode/452829> – ISBN 978-5-534-10895-8. – Текст : электронный.

2. Гателюк, О. В. Численные методы : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Гателюк, Ш. К. Исмаилов, Н. В. Манюкова. – Москва : Издательство Юрайт, 2020. – 140 с. – URL: <https://urait.ru/bcode/453080> – ISBN 978-5-534-07480-2. – Текст : электронный.

Дополнительные источники

1. Колдаев, В. Д. Численные методы и программирование [Текст] : учеб. пособие / В. Д. Колдаев ; под ред. Л. Г. Гагариной. – Москва : Издательство Форум, 2018. – 336 с. – ISBN 978-5-8199-0779-5. – Текст : непосредственный.

2. Численные методы : учебник и практикум для среднего профессионального образования / У. Г. Пирумов [и др.]. – 5-е изд., перераб. и

доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 421 с. – URL: <https://urait.ru/bcode/445775> – ISBN 978-5-534-11634-2. – Текст : электронный.

Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

1. Введение в вычислительную математику [Электронный ресурс]. Режим доступа : <http://www.intuit.ru/department/calculate/calcmathbase>.
2. Численные методы решения уравнений в частных производных [Электронный ресурс]. Режим доступа : <http://www.intuit.ru/department/calculate/vnmdiffeq>.
3. Численные методы решения уравнений в частных производных [Электронный ресурс]. Режим доступа : <http://www.intuit.ru/department/calculate/vnmdiffeq>.
4. Аппаратное обеспечение [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://old.intuit.ru/catalog/hardware/>, свободный.

4 КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Контроль и оценка результатов освоения учебной дисциплины осуществляется преподавателем в процессе проведения практических занятий, тестирования, а также выполнения обучающимися индивидуальных заданий.

<i>Результаты обучения</i>	<i>Критерии оценки</i>	<i>Формы и методы оценки</i>
<i>Перечень знаний, осваиваемых в рамках дисциплины:</i> – Методы хранения чисел в памяти электронно-вычислительной машины (далее – ЭВМ) и действия над ними, оценку точности вычислений; – Методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ.	«Отлично» – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, умения сформированы, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено высоко. «Хорошо» – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, некоторые умения сформированы недостаточно, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. «Удовлетворительно» – теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, необходимые умения работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство	– Тестирование на знание терминологии по теме; – Контрольная работа; – Наблюдение за выполнением практического задания. (деятельностью студента); – Оценка выполнения практического задания (работы); – Подготовка и выступление с докладом, сообщением, презентацией.
<i>Перечень умений, осваиваемых в рамках дисциплины:</i>		

– Использовать основные численные методы решения математических задач; – Выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи; – Давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения; – Разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата.	предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. <i>«Неудовлетворительно»</i> – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки.	
--	--	--

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Методические рекомендации по составлению презентаций

Презентация дает возможность наглядно представить инновационные идеи, разработки и планы. Учебная презентация представляет собой результат самостоятельной работы студентов, с помощью которой они наглядно демонстрируют материалы публичного выступления перед аудиторией.

Компьютерная презентация – это файл с необходимыми материалами, который состоит из последовательности слайдов. Каждый слайд содержит законченную по смыслу информацию, так как она не переносится на следующий слайд автоматически в отличие от текстового документа. Студенту – автору презентации, необходимо уметь распределять материал в пределах страницы и грамотно размещать отдельные объекты. В этом ему поможет целый набор готовых объектов (пиктограмм, геометрических фигур, текстовых окон и т.д.).

Бесспорным достоинством презентации является возможность при необходимости быстро вернуться к любому из ранее просмотренных слайдов или буквально на ходу изменить последовательность изложения материала. Презентация помогает самому выступающему не забыть главное и точнее расставить акценты.

Одной из основных программ для создания презентаций в мировой практике является программа PowerPoint компании Microsoft.

Структура презентации

Удерживать активное внимание слушателей можно не более 15 минут, а, следовательно, при среднем расчете времени просмотра – 1 минута на слайд, количество слайдов не должно превышать 15-ти.

Первый слайд презентации должен содержать тему работы, фамилию, имя и отчество исполнителя, номер учебной группы, а также фамилию, имя, отчество, должность и ученую степень преподавателя.

На втором слайде целесообразно представить цель и краткое содержание презентации.

Последующие слайды необходимо разбить на разделы согласно пунктам плана работы.

На заключительный слайд выносится самое основное, главное из содержания презентации.

Рекомендации по оформлению презентаций в Microsoft Power Point

Для визуального восприятия текст на слайдах презентации должен быть не менее 18 пт, а для заголовков – не менее 24 пт.

Макет презентации должен быть оформлен в строгой цветовой гамме. Фон не должен быть слишком ярким или пестрым. Текст должен хорошо читаться. Одни и те же элементы на разных слайдах должны быть одного цвета.

Пространство слайда (экрана) должно быть максимально использовано, за счет, например, увеличения масштаба рисунка. Кроме того, по возможности необходимо занимать верхние $\frac{3}{4}$ площади слайда (экрана), поскольку нижняя часть экрана плохо просматривается с последних рядов.

Каждый слайд должен содержать заголовок. В конце заголовков точка не ставится. В заголовках должен быть отражен вывод из представленной на слайде информации. Оформление заголовков заглавными буквами можно использовать только в случае их краткости.

На слайде следует помещать не более 5-6 строк и не более 5-7 слов в предложении. Текст на слайдах должен хорошо читаться.

При добавлении рисунков, схем, диаграмм, снимков экрана (скриншотов) необходимо проверить текст этих элементов на наличие ошибок. Необходимо проверять правильность написания названий улиц, фамилий авторов методик и т.д.

Нельзя перегружать слайды анимационными эффектами – это отвлекает слушателей от смыслового содержания слайда. Для смены слайдов используйте один и тот же анимационный эффект.

Успешное изучение курса требует посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления основной и дополнительной литературой. Работа с конспектом лекций предполагает просмотр конспекта в тот же день после занятий, пометку материала конспекта, который вызывает затруднения для понимания. Попытайтесь найти ответы на затруднительные вопросы, используя рекомендуемую литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, сформулируйте вопросы и обратитесь за помощью к преподавателю на консультации или ближайшей лекции.

Регулярно отводите время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам. Для выполнения письменных домашних заданий необходимо внимательно

прочитать соответствующий раздел учебника и проработать аналогичные задания, рассматриваемые преподавателем на лекционных занятиях.

Основным методом самостоятельной работы является изучение и учебно-методических материалов, научной литературы, в том числе из сети Интернет, и применение изученного на практике.

Алгоритм работы над каждой темой:

- изучите содержание темы вначале по лекционному материалу, а затем по другим источникам;
- прочитайте дополнительную литературу из списка, предложенного преподавателем;
- выпишите в тетрадь основные категории и персоналии по теме, используя лекционный материал или словари, что поможет быстро повторить материал при подготовке к сдаче темы или экзамена;
- составьте краткий план ответа по каждому вопросу, выносимому на обсуждение на семинарском занятии;
- выучите определения терминов, относящихся к теме;
- продумайте примеры и иллюстрации к ответу по изучаемой теме;
- продумывайте высказывания по темам, предложенным к семинарскому занятию.

Рекомендации по работе с литературой:

- ознакомьтесь с аннотациями к рекомендованной литературе и определите основной метод изложения материала того или иного источника;
- составьте собственные аннотации к другим источникам на карточках, что поможет при подготовке рефератов, текстов речей, при подготовке к экзамену;
- выберите те источники, которые наиболее подходят для изучения конкретной темы.

Методические рекомендации по написанию реферата

Успешное изучение курса требует посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления основной и дополнительной литературой. Работа с конспектом лекций предполагает просмотр конспекта в тот же день после занятий, пометку материала конспекта, который вызывает затруднения для понимания. Попытайтесь найти ответы на затруднительные вопросы, используя рекомендуемую литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, сформулируйте вопросы и обратитесь за помощью к преподавателю на консультации или ближайшей лекции.

Регулярно отводите время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам. Для выполнения письменных домашних заданий необходимо внимательно прочитать соответствующий раздел учебника и проработать аналогичные задания, рассматриваемые преподавателем на лекционных занятиях.

Основным методом самостоятельной работы является изучение и учебно-методических материалов, научной литературы, в том числе из сети Интернет, и применение изученного на практике.

Алгоритм работы над каждой темой:

- изучите содержание темы вначале по лекционному материалу, а затем по другим источникам;
- прочитайте дополнительную литературу из списка, предложенного преподавателем;
- выпишите в тетрадь основные категории и персоналии по теме, используя лекционный материал или словари, что поможет быстро повторить материал при подготовке к сдаче темы или экзамена;
- составьте краткий план ответа по каждому вопросу, выносимому на обсуждение на семинарском занятии;
- выучите определения терминов, относящихся к теме;
- продумайте примеры и иллюстрации к ответу по изучаемой теме;
- продумывайте высказывания по темам, предложенным к семинарскому занятию.

Рекомендации по работе с литературой:

- ознакомьтесь с аннотациями к рекомендованной литературе и определите основной метод изложения материала того или иного источника;
- составьте собственные аннотации к другим источникам на карточках, что поможет при подготовке рефератов, текстов речей, при подготовке к экзамену;
- выберите те источники, которые наиболее подходят для изучения конкретной темы.

1.Соответствие названия работы ее содержанию, четкая целевая направленность.

2.Логическая последовательность изложения материала, базирующаяся на прочных теоретических знаниях по избранной теме.

3.Необходимая глубина исследования практических результатов работы.

4.Конкретность представления практических результатов работы.

5.Корректное изложение материала и грамотное оформление работы.

Титульный лист является первым листом документа, единую форму которого устанавливает ГОСТ 2.105-79 (приложение №3). Титульный лист выполняется на листах формата А4 размером 210 X 297мм. В верхней части титульного листа пишется, в какой организации выполняется работа, далее буквами увеличенного кегля указывается тип («Реферат») и тема работы. В правой части рекомендуется помещать фамилии, инициалы преподавателя и исполнителя, подпись и дату. Подпись и дату заполняют строчными буквами.

Размер полей: левое - 30мм, правое - 10мм, верхнее - 15мм, нижнее -20мм.

При подготовке письменной работы с помощью принтера ПЭВМ следует учесть, что высота букв должна быть не менее 1,8мм, а каждая страница содержать 30 строк по 60 знаков в строке, включая знаки препинания и пробелы между словами (1800 знаков).

Нумерация страниц в работе должна быть сквозной, начинаться с титульного листа и заканчиваться на последней странице, включая список литературы и приложений. При этом на титульном листе и первой странице работы (оглавлении) номер страницы не ставится, но подразумевается. Номера страниц проставляются арабскими цифрами в правом нижнем углу.

Каждая глава в тексте должна иметь заголовок в точном соответствии с наименованием в содержании.

Текст работы пишется разборчиво на одной стороне листа (формата А4) с широкими полями слева, страницы пронумеровываются. При изложении материала нужно четко выделять отдельные части (абзацы), главы и параграфы начинать с новой страницы, следует избегать сокращения слов.

Текст работы набирается на компьютере, соблюдая правила (в дополнение к вышеуказанным):

- набор текста реферата необходимо осуществлять стандартным (Times New Roman) шрифтом;
- кегль 12;
- заголовки следует набирать 14 шрифтом (выделять полужирным);
- межстрочный интервал полуторный;
- разрешается интервал между абзацами;
- отступ в абзацах 1-2 см.;
- объем реферата 20-24 страницы.

Наименования разделов и подразделов должны быть краткими, состоящими из ключевых слов, несущих основную смысловую нагрузку. Наименования разделов записываются в виде заголовков (симметрично тексту) прописными заглавными буквами. Наименования подразделов записываются в виде заголовка строчными буквами, кроме первой прописной. Заголовки должны включать от двух до четырнадцати слов (не более двух строк). Переносы слов в заголовках не допускаются. Точку в конце заголовка не ставят. Если заголовок состоит из двух предложений, их разделяют точкой. Заголовок не должен быть последней строкой на странице.

Примерные темы рефератов:

1. Верные, сомнительные и значащие цифры
2. Интерполирование сплайнами
3. Применение метода Гаусса
4. Уточнённая схема Эйлера
5. Вычисление интегралов по формулам трапеций и парабол
6. Метод Хорд численного решения алгебраических и трансцендентных уравнений
7. Приближенные вычисления.
8. Интерполирование функций. Применение численных методов
9. Интерполяция функций интерполяционным многочленом Лагранжа
10. Численные методы. Интерполяция функций

Алгоритм решения методом Лагранжа

Метод множителей Лагранжа (в англ. литературе «LaGrange's method of undetermined multipliers») - это численный метод решения оптимизационных задач, который позволяет определить «условный» экстремум целевой функции (минимальное или максимальное значение)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr}$$

при наличии заданных ограничений на ее переменные в виде равенств (т.е. определена область допустимых значений)

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - это значения аргумента функции (управляемые параметры) на вещественной области при котором значение функции стремится к экстремуму. Применение названия «условный» экстремум связано с тем, что на переменные наложено дополнительное условие, которое ограничивает область допустимых значений при поиске экстремума функции.

Метод множителей Лагранжа позволяет задачу поиска условного экстремума целевой функции на множестве допустимых значений преобразовать к задаче безусловной оптимизации функции.

В случае если функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывны вместе со своими частными производными, то существуют такие переменные λ не равные одновременно нулю, при которых выполняется следующее условие:

$$\nabla L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Таким образом, в соответствии с методом множителей Лагранжа для поиска экстремума целевой функции на множестве допустимых значений составляю функцию Лагранжа $L(x, \lambda)$, которую в дальнейшем оптимизируют:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где λ - вектор дополнительных переменных, называемых неопределенными множителями Лагранжа.

Таким образом, задача нахождения условного экстремума функции $f(x)$ свелась к задаче поиска безусловного экстремума функции $L(x, \lambda)$.

Далее в соответствии с методом определяют частные производные функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_i} \quad (i \in 1 \dots n) \quad \text{и} \quad \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_j} \quad (j \in 1 \dots m)$$

Необходимое условие экстремума функции Лагранжа задается системой уравнений (система состоит из «n + m» уравнений):

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_j} = g_j(x) = 0 \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений позволяет определить аргументы функции (X), при которых значение функции $L(x, \lambda)$, а также значение целевой функции $f(x)$ соответствуют экстремуму.

Величина множителей Лагранжа (λ) имеет практический интерес в случае, если ограничения представлены в форме со свободным членом уравнения (константой). В этом случае можно рассматривать дальнейшее (увеличение/уменьшение) значения целевой функции за счет изменения значения константы в системе уравнения $g_j(x)$. Таким образом, множитель Лагранжа характеризует скорость изменения максимума целевой функции при изменении ограничивающей константы.

Существует несколько способов определения характера экстремума полученной функции:

Первый способ: Пусть (x_0, y_0) – координаты точки экстремума, а $f(x_0, y_0)$ – соответствующее значение целевой функции. Берется точка (x, y) , близкая к точке (x_0, y_0) , и вычисляется значение целевой функции $f(x, y)$:

- Если $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, то в точке (x_0, y_0) имеет место максимум.
- Если $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, то в точке (x_0, y_0) имеет место минимум.

Второй способ: Достаточным условием, из которого можно выяснить характер экстремума, является знак второго дифференциала функции Лагранжа. Второй дифференциал функции Лагранжа определяется следующим образом:

$$\partial^2 L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \cdot dx_i \cdot dx_j$$

Если в заданной точке $\partial^2 L(x, \lambda) > 0$, то целевая функция $f(x)$ имеет в данной точке условный **минимум**, если же $\partial^2 L(x, \lambda) < 0$, то целевая функция $f(x)$ имеет в данной точке условный **максимум**.

Третий способ: Также характер экстремума функции можно выяснить рассмотрев гессиан функции Лагранжа. Матрица Гессе представляет собой симметричную квадратную матрицу вторых частных производных функции в точке X_k , в которой элементы матрицы симметричны относительно главной диагонали.

$$G(X_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} L(x, \lambda) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \cdot \partial x_n} L(x, \lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \cdot \partial x_n} L(x, \lambda) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial^2 x_n} L(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

Для определения типа экстремума (максимум или минимум функции) можно воспользоваться правилом Сильвестра:

1. Для того, чтобы второй дифференциал функции Лагранжа был знакоположителен ($\partial^2 L(x, \lambda) > 0$) необходимо, чтобы угловые миноры функции были положительными $A_1 > 0, A_2 > 0, \dots, A_n > 0$. При таких условиях функция в этой точке имеет минимум.

2. Для того, чтобы второй дифференциал функции Лагранжа был знакоотрицателен ($\partial^2 L(x, \lambda) < 0$), необходимо, чтобы угловые миноры функции чередовались, причем первый элемент матрицы должен быть отрицательным $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots$. При таких условиях функция в этой точке имеет максимум.

Под угловым минором понимаем минор, расположенный в первых k строках и k столбцах исходной матрицы.

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots$$

Основное практическое значение метода Лагранжа заключается в том, что он позволяет перейти от условной оптимизации к безусловной и, соответственно, расширить арсенал доступных методов решения задачи. Однако задача решения системы уравнений, к которой сводится данный метод, в общем случае не проще исходной задачи поиска экстремума. Такие методы называются непрямыми. Их применение объясняется необходимостью получить решение экстремальной задачи в аналитической форме (допустим, для тех или иных теоретических выкладок). При решении конкретных практических задач обычно используются прямые методы, основанные на итеративных процессах вычисления и сравнения значений оптимизируемых функций.

Методика расчета

1 шаг: Определяем функцию Лагранжа из заданной целевой функции и системы ограничений:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

2 шаг: Определение аналитических соотношений (в символьном виде) для поиска безусловного экстремума функции $L(x, \lambda)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_j} = g_j(x) = 0 \end{cases}$$

3 шаг: Решаем полученную систему линейных или нелинейных уравнений, используя соответствующие методы решения.

4 шаг: Определяем характер экстремума (максимум или минимум целевой функции) по любому из представленных выше методов.

Методические рекомендации по разработке алгоритмов и программ для решения дифференциальных уравнений численными методами

Разработка программы численного интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения явным модифицированным методом Эйлера.

В этом методе в точках (X_n, Y_n) и (X_{n+1}, Y_{n+1}) используется значение угла наклона касательной в точке $(X_{n+1/2}, Y_{n+1/2})$, расположенной посередине между точками X_n и X_{n+1} .

Как и ранее, предполагается известным значения решения Y_n в точке X_n .

Метод состоит из двух шагов:

1) Первый шаг - расчет значения функции $Y_{n+1/2}$ в точке $(X_{n+h/2})$ по методу Эйлера

$$(Y_{n+1} = Y_n + hf(X_n, Y_n), n=1, 2, \dots, N)$$

$$Y_{n+1/2} = Y_n + \frac{h}{2} f(X_n, Y_n) \quad (1.1)$$

2) Второй шаг - расчет функции y в точке с координатой x_{n+1} с использованием значения функции

$F(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$ в точке $(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$:

$$Y_{n+1} = Y_n + hf(x_{n+h/2}, Y_{n+1/2}) \quad (1.2)$$

Таким образом, расчетные формулы имеют следующий вид:

$$Y_{n+1/2} = Y_n + \frac{h}{2} f(X_n, Y_n) \quad (1.3)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2} f(X_n, Y_n)\right) \quad (1.4)$$

Обозначив через $k_1=f(X_n, Y_n)$, $k_2=f(X_n+h/2, Y_n+hk_1/2)$, метод можно представить в обычном для методов Рунге-Кутты виде:

$$\frac{Y_{n+1}-Y_n}{h}=k_2 \quad (1.5)$$

Этот метод также является методом Рунге-Кутты второго порядка. Здесь тоже приходится вычислять дважды функцию $f(x, y)$ для получения решения в следующей точке X_{n+1} .

Для анализа погрешности численного решения модифицированным методом Эйлера получим точное решение задачи Коши для модельного уравнения

$$u' = \lambda u \text{ при } x > 0; u(0) = a \quad (1.6)$$

где a, λ - некоторые константы.

программа численное интегрирование

Формула модифицированного метода Эйлера (1.4) для уравнения (1.6) имеет вид

$$Y_{n+1}=Y_n+h\lambda Y_n(1+h\lambda/2)=Y_n(1+h\lambda+h^2\lambda^2/2), \quad (1.7)$$

так как в данном случае

$$f(x,y) = \lambda y, \text{ то } f(X_n+\frac{h}{2}, Y_n+\frac{h}{2}f(X_n, Y_n)) = \lambda(Y_n+h\lambda Y_n/2) \quad (1.8)$$

Таким образом, точное решение уравнения (1.4) для модельного уравнения (1.6) в точке X_{n+1} имеет вид

$$Y_{n+1}=a(1+h\lambda+h^2\lambda^2/2)^{n+1} \quad (1.9)$$

В то же время точное решение дифференциального уравнения (1.6) есть $u = ae^{\lambda x}$, которое при $x = h$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$:

$$u=a(1+h\lambda+\frac{h^2\lambda^2}{2!}+\frac{h^3\lambda^3}{3!}+\dots) \quad (1.10)$$

Из сопоставления уравнений (1.9) и (1.10) видно, что численное решение задачи (1.6) представляет собой три первых члена разложения функции $e^{\lambda h}$ в ряд Тейлора, то есть точного решения дифференциального уравнения (1.6), и ошибка его $|u_n - y_n|$ возрастает с увеличением x при $\lambda > 0$.

В случае $\lambda < 0$ уравнение (1.6) будет иметь асимптотически устойчивое решение, затухающее с увеличением x $u = \left(ae^{-|\lambda|x} \right)$, тогда как численное решение

$$Y_{n+1} = a \left(1 - h|\lambda| + h^2 \lambda^2 / 2 \right)^{n+1} \quad \text{при } h > 2/|\lambda| \quad (1.11)$$

с увеличением n неограниченно возрастает. Это явление называют частичной неустойчивостью, и проявляется оно с увеличением h , начиная с некоторого $h > h_k$, во всех явных методах типа Рунге-Кутты. Явление это не следует путать с неустойчивостью разностной схемы (метода), которая проявляется при уменьшении шага интегрирования h .

Следует отметить, что явление частичной неустойчивости в явных методах Рунге-Кутты проявляется и при решении уравнений, не имеющих асимптотически устойчивых решений. В этих случаях частичная неустойчивость затухивается ростом самого решения.

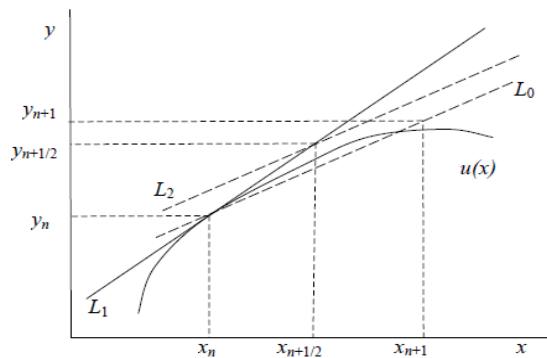


Рис.1 Модифицированный метод Эйлера.